初升高衔接课程•数学

第一讲　　数与式的运算

在初中，我们已学习了实数，知道字母可以表示数用代数式也可以表示数，我们把实数和代数式简称为数与式。代数式中有整式(多项式、单项式)、分式、根式，它们具有实数的属性，可以进行运算。在多项式的乘法运算中，我们学习了乘法公式(平方差公式与完全平方公式)，并且知道乘法公式可以使多项式的运算简便。由于在高中学习中还会遇到更复杂的多项式乘法运算，因此本节中将拓展乘法公式的内容，补充三个数和的完全平方公式、立方和、立方差公式。在根式的运算中，我们已学过被开方数是实数的根式运算，而在高中数学学习中，经常会接触到被开方数是字母的情形，但在初中却没有涉及，因此本节中要补充。基于同样的原因，还要补充“繁分式”等有关内容。

一、乘法公式

【公式 1】 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

证明：$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

例 1、计算：$(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{3})^2$

解：原式$=[x^2+(-\sqrt{2}x)+\frac{1}{3}]^2$

$$=(x^2)^2+(-\sqrt{2}x)^2+(\frac{1}{3})^2+2x^2(-\sqrt{2})x+2x^2\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times(-\sqrt{2}x)$$

$$=x^4-2\sqrt{2}x^3+\frac{8}{3}x^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{9}$$

说明：多项式乘法的结果一般是按某个字母的降幂或升幂排列。

【公式 2】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (立方和公式)

证明：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

例 2、计算：$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

解：原式$=[a+(-b)][a^2-a(-b)+(-b)^2]=a^3+(-b)^3=a^3-b^3$

我们得到：**【公式 3】**$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$(立方差公式)

请观察立方和、立方差公式的区别与联系

公式 1、2、3 均称为乘法公式

例 3、计算：

(1) $(4+m)(16-4m+m^2)$　　(2) $(\frac{1}{5}m-\frac{1}{2}n)(\frac{1}{25}m^2+\frac{1}{10}mn+\frac{1}{4}n^2)$

(3) $(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$　　(4) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$

解：(1)原式$=4^3+m^3=64+m^3$

(2)原式$=(\frac{1}{5}m)^3-(\frac{1}{2}n)^3=\frac{1}{125}m^3-\frac{1}{8}n^3$

(3)原式$=(a^2-4)(a^4+4a^2+4^2)=(a^2)^3-4^3=a^6-64$

(4)原式$=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2=[(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2$

$=(x^3+y^3)^2=x^6+2x^3y^3+y^6$

说明：(1)在进行代数式的乘法、除法运算时，要观察代数式的结构是否满足乘法公式的结构；(2)为了更好地使用乘法公式，记住 1、2、3、4、…、20 的平方数和 1、2、3、4、…、10 的立方数，是非常有好处的。

例 4、已知$x^2-3x+1=0$，求$x^3+\frac{1}{x^3}$的值。

解：$\because x^2-3x+1=0$　$\therefore x\neq 0$　$\therefore x+\frac{1}{x}=3$

原式$=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]=3(3^2-3)=18$

说明：本题若先从方程$x^2-3x+1=0$中解出x的值后，再代入代数式求值，则计算较烦琐。本题是根据条件式与求值式的联系，用整体代换的方法计算，简化了计算。请注意整体代换法。本题的解法，体现了“正难则反”的解题策略，根据题求利用题知，是明智之举。

例 5、已知 $a+b+c=0$，求 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的值。

解：∵ $a+b+c=0$　∴ $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$

∴原式 $=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{a+c}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{a(-a)}{bc}+\frac{b(-b)}{ac}+\frac{c(-c)}{ab}=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

∵ $a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=-c(c^2-3ab)=-c^3+3abc$

∴ $a^3+b^3+c^3=3abc$　∴原式 $=-\frac{3abc}{abc}=-3$

说明：注意字母的整体代换技巧的应用。

引申：可探求并证明 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

二、指数式

当 n 为自然数时，$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}a}$

当 n 为有理数时，

(1)零指数：$a^0=1$（$a\neq 0$）　(2)负指数：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$（$a\neq 0$）

(3)分数指数：$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$（$a>0$，$m$、$n$ 为正整数)

指数运算法则：($a>0$，$b>0$，m、n 为正整数)

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　(2) $(a^m)^n=a^{mn}$　(3) $(ab)^n=a^nb^n$

例 6、求下列各式的值：$8^{\frac{2}{3}}$，$100^{-\frac{1}{2}}$，$(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}$

解：$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$　或解：$8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$

$100^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{100^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$　$(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}=(\frac{2^4}{3^4})^{-\frac{3}{4}}=\frac{2^{-3}}{3^{-3}}=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}$

例 7、计算下列各式：

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$；(2) $(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8$

解：(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})=4a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=4ab^0=4a$

(2) $(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8=(p^{\frac{1}{4}})^8\cdot(q^{-\frac{3}{8}})^8=p^2q^{-3}=\frac{p^2}{q^3}$

三、根式

式子$\sqrt{a}$ ($a\ge 0$)叫做二次根式，其性质如下：

(1) $(\sqrt{a})^2=a$ ($a\ge 0$)　　　　(2) $\sqrt{a^2}=|a|$

(3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ($a\ge 0$，$b\ge 0$)　　　(4) $\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ($a>0$，$b\ge 0$)

例 8、化简下列各式：(1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$；(2) $\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$ ($x\ge 1$)

解：(1)原式$=|\sqrt{3}-2|+|\sqrt{3}-1|=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1$

(2)原式$=|1-x|+|2-x|=\begin{cases}(x-1)+(2-x)=1 & (1\le x\le 2)\\(x-1)+(x-2)=2x-3 & (x>2)\end{cases}$

说明：请注意性质$\sqrt{a^2}=|a|$的使用：当化去绝对值符号但字母的范围未知时，要对字母的取值分类讨论。

例 9、计算：(1) $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$；(2) $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$；(3) $2\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{x^3}+\sqrt{8x}$

解：(1)原式$=\frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}=6-3\sqrt{3}$

(2)原式$=\sqrt{\frac{a+b}{ab}}=\frac{\sqrt{(a+b)\cdot ab}}{ab}=\frac{\sqrt{a^2b+ab^2}}{ab}$

(3)原式$=2\sqrt{\frac{2x}{4}}-\sqrt{x\cdot x^2}+\sqrt{4\times 2x}=\sqrt{2x}-x\sqrt{x}+2\sqrt{2x}=3\sqrt{2x}-x\sqrt{x}$

说明：(1)二次根式的化简结果应满足：①被开方数的因数是整数，因式是整式；②被开方数不含能开得尽方的因数或因式。

(2)二次根式的化简常见类型有下列两种：①被开方数是整数或整式，化简时，先将它分解因数或因式，然后把开得尽方的因数或因式开出来；②分母中有根式(如$\frac{3}{2+\sqrt{3}}$)或被开方数有分母(如$\sqrt{\frac{x}{2}}$)，这时可将其化为$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$形式(如$\sqrt{\frac{x}{2}}$可化为$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$)，转化为“分母中有根式”的情况；化简时，要把分母中的根式化为有理式，

采取分子、分母同乘以一个根式进行化简(如$\frac{3}{2+\sqrt{3}}$化为$\frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$，其中$2+\sqrt{3}$与$2-\sqrt{3}$叫做互为有理化因式)。

例 10、计算：(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)(1-\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$；(2) $\frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}$

解：(1)原式$=(1+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2-(a+2\sqrt{ab}+b)=-2a-2\sqrt{ab}+2\sqrt{b}+1$

(2)原式$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{2\sqrt{a}}{a-b}$$

说明:有理数的的运算法则都适用于加法、乘法的运算律以及多项式的乘法公式、分式二次根式的运算。

例 11、设$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，$y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$，求$x^3+y^3$的值。

解：$x=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$，$y=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3}$

$\therefore x+y=14$，$xy=1$　$\therefore$原式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=2702$

说明：有关代数式的求值问题：(1)先化简后求值；(2)当直接代入运算较复杂时，可根据结论的结构特点，倒推几步，再代入条件，有时整体代入可简化计算量。

四、分式

当分式$\frac{A}{B}$的分子、分母中至少有一个是分式时，$\frac{A}{B}$就叫做繁分式，繁分式的化简常用以下两种方法：(1)利用除法法则；(2)利用分式的基本性质。

例 12、化简：$\dfrac{x}{x+\dfrac{1-x}{x-\dfrac{1}{x}}}$

解：原式$=\dfrac{x}{x+\dfrac{1-x}{\dfrac{x^2-1}{x}}}=\dfrac{x}{x+\dfrac{(1-x)x}{(x+1)(x-1)}}=\dfrac{x}{x-\dfrac{x}{x+1}}=\dfrac{x}{\dfrac{x^2}{x+1}}=\dfrac{x(x+1)}{x^2}=\dfrac{x+1}{x}$

另解：原式$=\dfrac{x}{x+\dfrac{(1-x)x}{(x-\frac{1}{x})x}}=\dfrac{x}{x+\dfrac{x(1-x)}{x^2-1}}=\dfrac{x}{x-\dfrac{x}{x+1}}=\dfrac{x(x+1)}{x(x+1)-x}=\dfrac{x+1}{x}$

说明：解法一的运算方法是从最内部的分式入手，采取通分的方式逐步脱掉繁分式，解法二则是利用分式的基本性质$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times M}{B\times M}$进行化简。一般根据题目特点综合使用两种方法。

例 13、化简：$\dfrac{x^2+3x+9}{x^3-27}+\dfrac{6x}{9x-x^2}-\dfrac{x-1}{6+2x}$

解：原式$=\dfrac{x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)}-\dfrac{6x}{x(x+3)(x-3)}-\dfrac{x-1}{2(x+3)}$

$$=\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x+3)(x-3)}-\frac{x-1}{2(x+3)}=\frac{2(x+3)-12-(x-1)(x-3)}{2(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{-x^2+6x-9}{2(x+3)(x-3)}=\frac{-(x-3)^2}{2(x+3)(x-3)}=\frac{3-x}{6+2x}$$

说明：(1)分式的乘除运算一般化为乘法进行，当分子、分母为多项式时，应先因式分解再进行约分化简；(2)分式的计算结果应是最简分式或整式。

练习

A 组

1．二次根式$\sqrt{a^2}=-a$成立的条件是(　　)

A．$a>0$　　B．$a<0$　　C．$a\le 0$　　D．a是任意实数

2．若$x<3$，则$\sqrt{9-6x+x^2}-|x-6|$的值是(　　)

A．-3　　B．3　　C．-9　　D．9

3．计算：

(1)$(x-3y-4z)^2$　　(2)$(2a+1-b)^2-(a-b)(a+2b)$

(3)$(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2$　　(4)$(a-4b)(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab)$

4．化简(下列a的取值范围均使根式有意义)：

(1)$\sqrt{-8a^3}$　　(2)$a\cdot\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$　　(3)$\dfrac{\sqrt{4ab}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$　　(4)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

5．化简：

(1) $\frac{m}{3}\sqrt{9m}+10m\sqrt{\frac{m}{25}}-2m^2\sqrt{\frac{1}{m}}$　　(2) $\sqrt{\frac{2x-2y}{x}}\div\sqrt{\frac{x-y}{2x^2y}}$ ($x>y>0$)

B 组

1．若 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$，则 $\frac{3x+xy-3y}{x-xy-y}$ 的值为(　　)

A． $\frac{3}{5}$　　B． $-\frac{3}{5}$　　C． $-\frac{5}{3}$　　D． $\frac{5}{3}$

2．计算：

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$　　(2) $1\div(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})$

3．设 $x=\frac{1}{\sqrt{3}-2}$， $y=\frac{1}{\sqrt{3}+2}$，求代数式 $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 的值。

4．当 $3a^2+ab-2b^2=0$ ($a\neq 0$， $b\neq 0$)，求 $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$ 的值。

5．设 x 、 y 为实数，且 $xy=3$，求 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值。

6．已知 $a=\frac{1}{20}x+20$， $b=\frac{1}{20}x+19$， $c=\frac{1}{20}x+21$，其中 x 为任意实数，求代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值。

7．设 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，求 x^4+x^2+2x-1 的值。

8．展开 $(x-2)^4$，并按 x 的降幂排练。

9．计算： $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

10．计算： $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

11．化简或计算：

(1) $(\sqrt{18}-4\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}})\div\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(2) $2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$

(3) $\dfrac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{xy-y^2}-\dfrac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}$　　　　(4) $(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}})\div(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}})$

第二讲　　因式分解

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形，它与整式乘法是相反方向的变形，在分式运算、解方程及各种恒等变形中起着重要的作用，是一种重要的基本技能。因式分解的方法较多，除了初中课本涉及到的提取公因式法和公式法(平方差公式和完全平方公式)外，还有公式法(立方和、立方差公式)、十字相乘法和分组分解法等等。

一、公式法(立方和、立方差公式)

在第一讲里，我们已经学习了乘法公式中的立方和、立方差公式：

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (立方和公式)

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (立方差公式)

由于因式分解与整式乘法正好是互为逆变形，所以把整式乘法公式反过来写，就得到：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

这就是说，两个数的立方和(差)，等于这两个数的和(差)乘以它们的平方和与它们积的差(和)。运用这两个公式，可以把形式是立方和或立方差的多项式进行因式分解。

例 1、用立方和或立方差公式分解下列各多项式：

(1) $8+x^3$　　(2) $0.125-27b^3$

分析：(1)中，$8=2^3$；(2)中，$0.125=0.5^3$，$27b^3=(3b)^3$

解：(1) $8+x^3=2^3+x^3=(2+x)(4-2x+x^2)$

(2) $0.125-27b^3=0.5^3-(3b)^3=(0.5-3b)(0.25+1.5b+9b^2)$

说明：(1)在运用立方和(差)公式分解因式时，经常要逆用幂的运算法则，如 $27b^3=(3b)^3$，这里逆用了法则 $(ab)^n=a^nb^n$；(2)在运用立方和(差)公式分解因式

时，一定要看准因式中各项的符号。

例 2、分解因式：(1) $3a^3b-81b^4$　　(2) a^7-ab^6

分析：(1)中应先提取公因式再进一步分解；(2)中提取公因式后，括号内出现 a^6-b^6，可看作是 $(a^3)^2-(b^3)^2$ 或 $(a^2)^3-(b^2)^3$。

解：(1) $3a^3b-81b^4=3b(a^3-27b^3)=3b(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

(2) $a^7-ab^6=a(a^6-b^6)=a(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$$=a(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

二、分组分解法

从前面可以看出，能够直接运用公式法分解的多项式，主要是二项式和三项式，而对于四项以上的多项式，如 $ma+mb+na+nb$ 既没有公式可用，也没有公因式可以提取。因此，可以先将多项式分组处理，这种利用分组来因式分解的方法叫做分组分解法，分组分解法的关键在于如何分组。

1．分组后能提取公因式

例 3、把 $2ax-10ay-5by-bx$ 分解因式。

分析：把多项式的四项按前两项与后两项分成两组，并使两组的项按 x 的降幂排列，然后从两组分别提出公因式 $2a$ 与 $-b$，这时另一个因式正好都是 $x-5y$，这样可以继续提取公因式。

解：$2ax-10ay-5by-bx=2a(x-5y)-b(x-5y)=(x-5y)(2a-b)$

说明：用分组分解法，一定要想想分组后能否继续完成因式分解，由此合理选择分组的方法。本题也可以将一、四项为一组，二、三项为一组，不妨一试。

例 4、把 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$ 分解因式。

分析：按照原先分组方式，无公因式可提，需要把括号打开后重新分组，然后再分解因式。

解：$ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$$=(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)=(bc-ad)(ac+bd)$$

说明：由例 3、例 4 可以看出，分组时运用了加法结合律，而为了合理分组，先

运用了加法交换律，分组后，为了提公因式，又运用了分配律。由此可以看出运算律在因式分解中所起的作用。

2．分组后能直接运用公式

例 5、把$x^2-y^2+ax+ay$分解因式。

分析：把第一、二项为一组，这两项虽然没有公因式，但可以运用平方差公式分解因式，其中一个因式是$x+y$；把第三、四项作为另一组，在提出公因式a后，另一个因式也是$x+y$。

解：$x^2-y^2+ax+ay=(x+y)(x-y)+a(x+y)=(x+y)(x-y+a)$

例 6、把$2x^2+4xy+2y^2-8z^2$分解因式。

分析：先将系数2提出后，得到$x^2+2xy+y^2-4z^2$，其中前三项作为一组，它是一个完全平方式，再和第四项形成平方差形式，可继续分解因式。

解：$2x^2+4xy+2y^2-8z^2=2(x^2+2xy+y^2-4z^2)=2[(x+y)^2-4z^2]$

$=2(x+y+2z)(x+y-2z)$

说明：从例 5、例 6 可以看出：如果一个多项式的项分组后，各组都能直接运用公式或提取公因式进行分解，并且各组在分解后，它们之间又能运用公式或有公因式，那么这个多项式就可以分组分解法来分解因式。

三、十字相乘法

1．$x^2+(p+q)x+pq$型的因式分解

这类式子在许多问题中经常出现，其特点是：(1)二次项系数是1；(2)常数项是两个数之积；(3)一次项系数是常数项的两个因数之和。

$x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=x(x+p)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$

因此，$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$

运用这个公式，可以把某些二次项系数为1的二次三项式分解因式。

例 7、把下列各式因式分解：(1) x^2-7x+6　　(2) $x^2+13x+36$

解：(1)∵ $6=(-1)\times(-6)$，$-7=(-1)+(-6)$　∴ $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$

(2)∵ $36=4\times 9$，$13=4+9$　∴ $x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$

说明：此例可以看出，常数项为正数时，应分解为两个同号因数，它们的符号与一次项系数的符号相同。

例 8、把下列各式因式分解：(1) $x^2+5x-24$　(2) $x^2-2x-15$

解：(1)∵ $-24=(-3)\times 8$，$5=(-3)+8$　∴ $x^2+5x-24=(x-3)(x+8)$

(2)∵ $-15=(-5)\times 3$，$-2=(-5)+3$　∴ $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$

说明：此例可以看出，常数项为负数时，应分解为两个异号的因数，其中绝对值较大的因数与一次项系数的符号相同。

例 9、把下列各式因式分解：(1) $x^2+xy-6y^2$　(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

分析：(1)把 $x^2+xy-6y^2$ 看成 x 的二次三项式，这时常数项是 $-6y^2$，一次项系数是 y，把 $-6y^2$ 分解成 $3y$ 与 $-2y$ 的积，而 $3y+(-2y)=y$ 正好是一次项系数。(2)由换元思想，只要把 x^2+x 整体看作一个字母 a，可不必写出，只当作分解二次三项式 $a^2-8a+12$。

解：(1) $x^2+xy-6y^2=x^2+y\cdot x-6y^2=(x+3y)(x-2y)$

(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=(x^2+x-6)(x^2+x-2)=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$

2．一般二次三项式 ax^2+bx+c 型的因式分解

大家知道，$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$

反过来就得到：$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

我们发现，二次项系数 a 分解成 a_1a_2，常数项 c 分解成 c_1c_2，把 a_1、a_2、c_1、c_2 写成 $\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix}$，按斜线交叉相乘再相加，就可以得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 ax^2+bx+c 的一次项系数 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$，

其中a_1、c_1位于上一行，a_2、c_2位于下一行。这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫做十字相乘法。

必须注意，分解因数及十字相乘都有多种可能情况，所以往往要经过多次尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解。

例 10、把下列各式因式分解：

(1)$12x^2-5x-2$　　(2)$5x^2+6xy-8y^2$

解：(1)$\begin{matrix}3 & & -2\\ & \times & \\ 4 & & 1\end{matrix}$　$12x^2-5x-2=(3x-2)(4x+1)$

(2)$\begin{matrix}1 & & 2y\\ & \times & \\ 5 & & -4y\end{matrix}$　$5x^2+6xy-8y^2=(x+2y)(5x-4y)$

说明：用十字相乘法分解二次三项式很重要。当二次项系数不是1时较困难，具体分解时，为提高速度，可先对有关常数分解，交叉相乘后，若原常数为负数，用减法”凑”，看是否符合一次项系数，否则用加法”凑”，先”凑”绝对值，然后调整，添加正、负号。

四、其它因式分解的方法

1．配方法

例 11、分解因式：$x^2+6x-16$

解：$x^2+6x-16=x^2+2\times3\times x+3^2-3^2-16=(x+3)^2-5^2$

$$=(x+3+5)(x+3-5)=(x+8)(x-2)$$

说明：这种设法配成有完全平方式的方法叫做配方法，配方后将二次三项式化为两个平方式，然后用平方差公式分解。当然，本题还有其它方法，请大家试验。

2．拆、添项法

例 12、分解因式：x^3-3x^2+4

分析：此多项式显然不能直接提取公因式或运用公式，分组也不易进行。细查式中无一次项，如果它能分解成几个因式的积，那么进行乘法运算时，必是把一次项系数合并为0了，可考虑通过添项或拆项解决。

解：$x^3-3x^2+4=(x^3+1)-(3x^2-3)=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)$

$$=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

说明：本解法把原常数4拆成1与3的和，将多项式分成两组，满足系数对应成比例，造成可以用公式法及提取公因式的条件。

本题还可以将$-3x^2$拆成x^2-4x^2，将多项式分成两组(x^3+x^2)和$-4x^2+4$。

一般地，把一个多项式因式分解，可以按照下列步骤进行：
(1)如果多项式各项有公因式，那么先提取公因式；
(2)如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；
(3)如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组或其它方法(如十字相乘法)来分解；
(4)分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止。

练习

A组

1．把下列各式分解因式：

(1) a^3+27　　(2) $8-m^3$　　(3) $-27x^3+8$

(4) $-\frac{1}{8}p^3-\frac{1}{64}q^3$　　(5) $8x^3y^3-\frac{1}{125}$　　(6) $\frac{1}{216}x^3y^3+\frac{1}{27}c^3$

2．把下列各式分解因式：

(1) xy^3+x^4　　(2) $x^{n+3}-x^ny^3$

(3) $a^2(m+n)^3-a^2b^3$　　(4) $y^2(x^2-2x)^3+y^2$

3．把下列各式分解因式：

(1) x^2-3x+2　　(2) $x^2+37x+36$　　(3) $x^2+11x-26$

(4) $x^2-6x-27$　　(5) $m^2-4mn-5n^2$　　(6) $(a-b)^2+11(a-b)+28$

4．把下列各式分解因式：

(1) $ax^5-10ax^4+16ax^3$　　(2) $a^{n+2}+a^{n+1}b-6a^nb^2$　　(3) $(x^2-2x)^2-9$

(4) x^4-7x^2-18　　(5) $6x^2-7x-3$　　(6) $8x^2+26xy-15y^2$

(7) $7(a+b)^2-5(a+b)-2$　　(8) $(6x^2-7x)^2-25$

5．把下列各式分解因式：

(1) $3ax-3ay+xy-y^2$　　(2) $8x^3+4x^2-2x-1$　　(3) $5x^2-15x+2xy-6y$

(4) $4a^2-20ab+25b^2-36$　　(5) $4xy+1-4x^2-y^2$　　(6) $a^4b+a^3b^2-a^2b^3-ab^4$

(7) $x^6-y^6-2x^3+1$　　(8) $x^2(x+1)-y(xy+x)$

B 组

1．把下列各式分解因式：

(1) $ab(c^2-d^2)+cd(a^2-b^2)$　　(2) $x^2-4mx+8mn-4n^2$　　(3) x^4+64

(4) $x^3-11x^2+31x-21$　　(5) $x^3-4xy^2-2x^2y+8y^3$

2．已知 $a+b=\dfrac{2}{3}$，$ab=2$，求代数式 $a^2b+2a^2b^2+ab^2$ 的值。

3．求证：当 n 为大于 2 的整数时，n^5-5n^3+4n 能被 120 整除。

4．已知 $a+b+c=0$，求证：$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=0$。

第三讲　　方程

第一节　一元二次方程根与系数的关系

现行初中数学教材主要要求学生掌握一元二次方程的概念、解法及应用，而一元二次方程的根的判断式及根与系数的关系，在高中教材中的二次函数、不等式及解析几何等章节有着许多应用。本节将对一元二次方程根的判别式、根与系数的关系进行阐述。

一、一元二次方程的根的判断式

一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)用配方法变形为：$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(1)当$b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实数根：$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2)当$b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实数根：$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$

(3)当$b^2-4ac<0$时，方程没有实数根

由于可以用b^2-4ac的取值情况来判定一元二次方程的根的情况，因此把$\Delta=b^2-4ac$叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)的根的判别式。

例 1、不解方程，判断下列方程的实数根的个数：

(1) $2x^2-3x+1=0$　　(2) $4y^2+9=12y$　　(3) $5(x^2+3)-6x=0$

解：(1) $\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=1>0$　∴原方程有两个不相等的实数根

(2)原方程可化为$4y^2-12y+9=0$　$\Delta=(-12)^2-4\times4\times9=0$

∴原方程有两个相等的实数根.

(3)原方程可化为$5x^2-6x+15=0$　$\Delta=(-6)^2-4\times5\times15=-264<0$

∴原方程没有实数根

说明：在求判断式时，务必先把方程变形为一元二次方程的一般形式。

例 2、已知关于x的一元二次方程$3x^2-2x+k=0$，根据下列条件，分别求出k的范围：(1)方程有两个不相等的实数根；(2)方程有两个相等的实数根；(3)方程有实数根；(4)方程无实数根。

解：$\Delta=(-2)^2-4\times3\times k=4-12k$

(1) $4-12k>0\Rightarrow k<\frac{1}{3}$；(2) $4-12k=0\Rightarrow k=\frac{1}{3}$

(3) $4-12k\geq0\Rightarrow k\leq\frac{1}{3}$；(4) $4-12k<0\Rightarrow k>\frac{1}{3}$

例 3、已知实数x、y满足$x^2+y^2-xy+2x-y+1=0$，试求x、y的值。

解：将原等式整理为关于x的方程，$x^2-(y-2)x+y^2-y+1=0$

∵ x是实数　∴上述方程有实数根　∴ $\Delta=[-(y-2)]^2-4(y^2-y+1)=-3y^2\geq0$

∴ $y=0$　代入原方程得，$x^2+2x+1=0$　∴ $x=-1$

二、一元二次方程的根与系数的关系

一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)的两个根为$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})}{(2a)^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

定理(韦达定理)：如果一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)的两个根为x_1、x_2，那么$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

说明：一元二次方程根与系数的关系由十六世纪的法国数学家韦达发现，所以通常把此定理称为”韦达定理”，上述定理成立的前提是$\Delta\geq0$。

例 4、若x_1、x_2是方程$x^2+2x-2007=0$的两个根，试求下列各式的值：

(1) $x_1^2+x_2^2$；(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；(3) $(x_1-5)(x_2-5)$；(4) $|x_1-x_2|$。

分析：本题若直接用求根公式求出方程的两根，再代入求值，将会出现复杂的计算，这里可以利用韦达定理来解答。

解：由韦达定理得，$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-2007$

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2)^2-2\times(-2007)=4018$

(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-2}{-2007}=\frac{2}{2007}$

(3) $(x_1-5)(x_2-5)=x_1x_2-5(x_1+x_2)+25=-2007-5\times(-2)+25=-1972$

(4) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-2)^2-4\times(-2007)}=4\sqrt{502}$

说明：利用根与系数的关系求值，要熟练掌握以下等式变形：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，$x_1x_2^2+x_1^2x_2=x_1x_2(x_1+x_2)$，

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ 等等，韦达定理体现了整体思想。

例 5、已知关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+\frac{1}{4}k^2+1=0$，根据下列条件分别求出 k 的值。

(1)方程两实根的积为 5；(2)方程的两实根 x_1、x_2 满足 $|x_1|=x_2$。

分析：(1)由韦达定理即可求之；(2)有两种可能，一是 $x_1=x_2>0$，二是 $-x_1=x_2$，所以要分类讨论。

解：(1)∵方程两实根的积为 5　∴ $x_1x_2=\frac{1}{4}k^2+1=5\Rightarrow k=\pm4$

又∵ $\Delta=[-(k+1)]^2-4\times(\frac{1}{4}k^2+1)=2k-3\geq0$　∴ $k\geq\frac{3}{2}$　∴ $k=4$

(2)当 $x_1\geq0$ 时，$x_1=x_2$，即方程有两相等实数根　∴ $\Delta=2k-3=0$　∴ $k=\frac{3}{2}$

当 $x_1<0$ 时，$-x_1=x_2\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow k+1=0\Rightarrow k=-1$

此时，$\Delta>0\Rightarrow k>\frac{3}{2}$　∴ $k=-1$ 不合题意，舍去

综上，当$k=\frac{3}{2}$时，方程的两实根x_1、x_2满足$|x_1|=x_2$

说明：根据一元二次方程两实根满足的条件，求待定字母的值，务必要注意方程有两实根的条件，即所求的字母应满足$\Delta\geq 0$

例 6、已知x_1、x_2是一元二次方程$4kx^2-4kx+k+1=0$的两个实数根。

(1)是否存在实数k，使得$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$成立？若存在，求出$k$的值；若不存在，请您说明理由；(2)求使得$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$的值为整数的实数$k$的整数值。

解：∵一元二次方程$4kx^2-4kx+k+1=0$有两个实数根

$\therefore \begin{cases} 4k\neq 0 \\ \Delta=(-4k)^2-4\times 4k(k+1)=-16k\geq 0 \end{cases} \Rightarrow k<0$且$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{k+1}{4k}$

(1)假设存在实数k，使得$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$成立，则

$$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2=2-\frac{9(k+1)}{4k}=-\frac{3}{2}$$

$\therefore k=\frac{9}{5}$ ∵ $k<0$ ∴不存在实数k，使得$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\frac{3}{2}$成立

(2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-2=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-4=\frac{4k}{k+1}-4=-\frac{4}{k+1}$

∴要使其值为整数，只需$k+1$能被4整除 ∵ $k<0$ $k+1=-1$，-2，-4

∴使得$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$的值为整数的实数$k$的整数值为$-2$，$-3$，$-5$

说明：(1)存在性问题的题型，通常是先假设存在，然后推导其值，若能求出，则说明存在，否则即不存在；(2)本题综合性较强，要学会对$\frac{4}{k+1}$为整数的分析方法。

练习

A 组

1．方程$(1-k)x^2-2x-1=0$有两个不相等的实数根，则k的取值范围是(　　)

A．$k>2$　　B．$k<2$且$k\neq 1$　　C．$k<2$　　D．$k>2$且$k\neq 1$

2．若x_1、x_2是方程$2x^2-6x+3=0$的两个根，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值为(　　)

A．2　　　B．-2　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{9}{2}$

3．已知菱形$ABCD$的边长为5，两条对角线交于O点，且OA、OB的长分别是关于x的方程$x^2+(2m-1)x+m^2+3=0$的根，则$m=$(　　)

A．-3　　　B．5　　　C．5或-3　　　D．-5或3

4．若t是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$($a\neq0$)的根，则判别式$\Delta=b^2-4ac$和完全平方式$M=(2at+b)^2$的关系是(　　)

A．$\Delta=M$　　　B．$\Delta>M$　　　C．$\Delta<M$　　　D．大小关系不能确定

5.若实数$a\neq b$，且a、b满足$a^2-8a+5=0$，$b^2-8b+5=0$，则$\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}=$(　　)

A．-20　　　B．2　　　C．2或-20　　　D．2或20

6．若方程$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$的两根相等，则实数a、b、c之间的关系是________。

7．已知一个直角三角形的两条直角边的长恰是方程$2x^2-8x+7=0$的两个根，则这个直角三角形的斜边长是________。

8．若方程$2x^2-(k+1)x+k+3=0$的两根之差为1，则k的值是________。

9．设x_1、x_2是关于x的方程$x^2+px+q=0$的两实根，x_1+1、x_2+1是关于x的方程$x^2+qx+p=0$的两实根，则$p=$________，$q=$________。

10．若实数a、b、c满足$a=6-b$，$c^2=ab-9$，则$a=$________，$b=$________，$c=$________。

11．对于二次三项式$x^2-10x+36$，小明得出如下结论：无论x取什么实数，其值都不可能等于10。你是否同意他的看法？请您说明理由。

12．若$n>0$，关于x的方程$x^2-(m-2n)x+\frac{1}{4}mn=0$有两个相等的的正实数根，求$\frac{m}{n}$的值。

13．已知关于x的一元二次方程$x^2+(4m+1)x+2m-1=0$。

(1)求证：不论为任何实数，方程总有两个不相等的实数根；(2)若方程的两根为x_1、

x_2，且满足$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{2}$，求$m$的值。

14．已知关于x的方程$x^2-(k+1)x+\frac{1}{4}k^2+1=0$的两根是一个矩形两边的长。

(1)k取何值时，方程有两个正实数根？(2)当矩形的对角线长为$\sqrt{5}$时，求k的值。

B组

1．关于x的方程$(k-1)x^2+(2k-3)x+k+1=0$有两个不相等的实数根x_1、x_2。

(1)求k的取值范围；(2)是否存在实数k，使方程的两实根互为相反数？如果存在，求出k的值；如果不存在，请您说明理由。

2．已知关于x的方程$x^2+3x-m=0$的两个实数根的平方和等于11，求证：关于x的方程$(k-3)x^2+kmx-m^2+6m-4=0$有实数根。

3．若x_1、x_2是关于x的方程$x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$的两个实数根，且x_1、x_2都大于1。

(1)求实数k的取值范围；(2)若$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{2}$，求$k$的值。

第二节　　简单的二元二次方程组

在初中我们已经学习了一元一次方程、一元二次方程及二元一次方程组的解法，掌握了用消元法解二元一次方程组，高中新课标必修2中学习圆锥曲线时，需要用到二元二次方程组的解法，因此，本节介绍简单的二元二次方程组的解法。

含有两个未知数、且含有未知数的项的最高次数是2的整式方程，叫做二元二次方程。由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，或由两个二元二次方程组组成的方程组，叫做二元二次方程组。

一、由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组

一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组一般都可以用代入法求解，其蕴含着转化思想：将二元一次方程化归为熟悉的一元二次方程求解。

例 1、解方程组$\begin{cases}2x-y=0 & ①\\ x^2-y^2+3=0 & ②\end{cases}$

分析：方程①是二元一次方程，故可由方程①得，$y=2x$，代入方程②消去y。

解：由①得，$y=2x$　③

将③代入②得，$x^2-(2x)^2+3=0$　解得，$x_1=1$，$x_2=-1$

把$x_1=1$代入③得，$y_1=2$；把$x_2=-1$代入③得，$y_2=-2$

∴原方程组的解是$\begin{cases}x_1=1\\y_1=2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-1\\y_2=-2\end{cases}$

说明：(1)解由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组的步骤：

①由二元一次方程变形为用x表示y或用y表示x的方程

②把此方程代入二元二次方程，得一个一元二次方程

③解消元后得到的一元二次方程

④把一元二次方程的根代入变形后的二元一次方程，求相应的未知数的值

⑤写出答案

(2)消x还是消y，应由二元一次方程的系数来决定。若系数均为整数，那么最好消去系数绝对值较小的，如方程$x-2y+1=0$可以消去x，变形得$x=2y-1$，再代入消元。

(3)消元后，求出一元二次方程的根，应代入二元一次方程求另一未知数的值，不能代入二元二次方程求另一未知数的值，这样可能产生增根，这一点切记。

例 2、解方程组$\begin{cases}x+y=11 & ①\\xy=28 & ②\end{cases}$

分析：本题可以用代入消元法解方程组，但注意到方程组的特点，可以把x、y看成是方程$z^2-11z+28=0$的两根，则更容易求解。

解：根据一元二次方程的根与系数的关系，把x、y看成是方程$z^2-11z+28=0$的两根，解方程得，$z=4$或$z=7$

∴原方程组的解是$\begin{cases}x_1=4\\y_1=7\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=7\\y_2=4\end{cases}$

说明：(1)对于这种对称性的方程组$\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$，利用一元二次方程的根与系数的

关系构造方程时，未知数要换成异于 x 、 y 的字母，如 z 。

(2)对称形方程组的解也应是对称的，即有解 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 7 \end{cases}$，则必有解 $\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

二、由两个二元二次方程组成的方程组

1．可因式分解型的方程组

方程组中的一个方程可以因式分解化为两个二元一次方程，则原方程组可转化为两个方程组，其中每个方程组都是由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成。

例 3、解方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5(x+y) & ① \\ x^2 + xy + y^2 = 43 & ② \end{cases}$

分析：注意到方程 $x^2 - y^2 = 5(x+y)$ 可分解成 $(x+y)(x-y-5)=0$，即得 $x+y=0$ 或 $x-y-5=0$，则可得到两个二元二次方程组，且每个方程组中均有一个方程为二元一次方程。

解：由① $\Rightarrow (x+y)(x-y)-5(x+y)=0 \Rightarrow (x+y)(x-y-5)=0$

$\therefore x+y=0$ 或 $x-y-5=0$

$\therefore$ 原方程组可化为两个方程组 $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=43 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x^2+xy+y^2=43 \end{cases}$

用代入法解这两个方程组得，原方程组的解为

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{43} \\ y_1 = -\sqrt{43} \end{cases}$，$\begin{cases} x_2 = -\sqrt{43} \\ y_2 = \sqrt{43} \end{cases}$，$\begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = -6 \end{cases}$，$\begin{cases} x_4 = 6 \\ y_4 = 1 \end{cases}$

说明：由两个二元二次方程组成的方程组中，有一个方程可以通过因式分解，化为两个二元一次方程，则原方程组转化为解两个方程组，其中每一个方程组均有一个方程是二元一次方程。

例 4、解方程组 $\begin{cases} x^2 + xy = 12 & ① \\ xy + y^2 = 4 & ② \end{cases}$

分析：本题的特点是方程组中的两个方程均缺一次项，我们可以消去常数项，可得到一个二次三项式的方程，对其因式分解，就可以转化为例 3 的类型。

解：①－②×3 得，$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow (x-3y)(x+y)=0$

$\therefore x-3y=0$ 或 $x+y=0$

$\therefore$原方程组可化为两个二元一次方程组$\begin{cases}x-3y=0\\xy+y^2=4\end{cases}$，$\begin{cases}x+y=0\\xy+y^2=4\end{cases}$

用代入法解这两个方程组得原方程组的解为$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-3\\y_2=-1\end{cases}$

说明：若方程组的两个方程均缺一次项，则消去常数项得到一个二元二次方程，此方程与原方程组中任何一个方程联立，得到一个可因式分解型的二元二次方程组。

例 5、解方程组$\begin{cases}x^2+y^2=26 & ①\\xy=5 & ②\end{cases}$

分析：①+②×2 得，$(x+y)^2=36$　③　　①−②×2 得，$(x-y)^2=16$　④

分别分解③④可得四个二元一次方程组。

解：①+②×2 得，$x^2+y^2+2xy=36 \Rightarrow (x+y)^2=36 \Rightarrow x+y=6$ 或 $x+y=-6$

①−②×2 得，$x^2+y^2-2xy=16 \Rightarrow (x-y)^2=16 \Rightarrow x-y=4$ 或 $x-y=-4$

解此四个方程组得，原方程组的解为$\begin{cases}x_1=5\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=1\\y_2=5\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=-1\\y_3=-5\end{cases}$，$\begin{cases}x_4=-5\\y_4=-1\end{cases}$

说明：对称型方程组，如$\begin{cases}x^2+y^2=a\\x+y=b\end{cases}$、$\begin{cases}x^2+y^2=a\\xy=b\end{cases}$都可以通过变形转化为$\begin{cases}x+y=m\\xy=n\end{cases}$的形式，通过构造一元二次方程求解。

2．可消二次项型的方程组

例 6、解方程组$\begin{cases}xy+x=3 & ①\\3xy+y=8 & ②\end{cases}$

分析：注意到两个方程都有 xy 项，所以可用加减法消之，得到一个二元一次方程，即转化为由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组。

解：①×3−② 得，$3x-y=1 \Rightarrow y=3x-1$　③

代入①得，$x(3x-1)+x=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x_1=1$，$x_2=-1$

分别代入③得，$y_1 = 2$，$y_2 = -4$ ∴原方程组的解为$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$

说明:若方程组的两个方程的二次项系数对应成比例,则可用加减法消去二次项,得到一个二元一次方程，把它与原方程组的任意一个方程联立，解此方程组，即得原方程组的解。

二元二次方程组类型多样，消元与降次是两种基本方法，具体问题具体解决。

练习

A 组

1．解下列方程组：

(1)$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ y = x \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ x + y = 2 \end{cases}$

(3)$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 5 \end{cases}$　　(4)$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x^2 + 2xy = 10 \end{cases}$

2．解下列方程组：

(1)$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$

3．解下列方程组：

(1)$\begin{cases} x(2x - 3) = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} (3x + 4y - 3)(3x + 4y + 3) = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

(3)$\begin{cases} (x - y + 2)(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$　　(4)$\begin{cases} (x + y)(x + y - 1) = 0 \\ (x - y)(x - y - 1) = 0 \end{cases}$

4．解下列方程组：

(1)$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} xy + x = 16 \\ xy - x = 8 \end{cases}$

B 组

1．解下列方程组：

(1)$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - 2y + 3x - 2 = 0 \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$

2．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2xy=-21 \end{cases}$

3．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x^2-y^2=8 \\ x^2+xy+y^2=4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2xy=-21 \end{cases}$

4．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

第三节　　分式方程和无理方程的解法

初中大家已经学习了可化为一元一次方程的分式方程的解法，本节将要学习可化为一元二次方程的分式方程的解法以及无理方程的解法，并且只要求掌握：(1)不超过三个分式构成的分式方程的解法，会用"去分母"或"换元法"求方程的根，并会验根；(2)了解无理方程概念，掌握可化为一元二次方程的无理方程的解法，会用"平方"或"换元法"求根，并会验根。

一、可化为一元二次方程的分式方程

1．去分母化分式方程为一元二次方程

例 1、解方程 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}=1$

分析：去分母，转化为整式方程。

解：原方程可化为：$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{2}{x-2}=1$

方程两边各项都乘以 x^2-4 得，$(x-2)+4x-2(x+2)=x^2-4$，即 $x^2-3x+2=0$

解得，$x_1=1$，$x_2=2$

检验：把 $x_1=1$ 代入 x^2-4，不等于 0　$\therefore x_1=1$ 是原方程的解

把 $x_2=2$ 代入 x^2-4，等于 0　$\therefore x_2=2$ 是增根

$\therefore$原方程的解是 $x=1$

说明：(1)去分母解分式方程的步骤：①把各分式的分母因式分解；②在方程两边同乘以各分式的最简公分母；③去括号，把所有项都移到左边，合并同类项；④解一元二次方程；⑤验根。

(2)验根的基本方法是代入原方程进行检验，但代入原方程计算量较大，而分式方程可能产生的增根，就是使分式方程的分母为0的根，因此我们只要检验一元二次方程的根，是否使分式方程两边同乘的各分式的最简公分母为0，若为0，即为增根；若不为0，即为原方程的解。

2．用换元法化分式方程为一元二次方程

例 2、解方程$(\frac{x^2}{x-1})^2-\frac{3x^2}{x-1}-4=0$

分析：本题若直接去分母，会得到一个四次方程，解方程很困难，但注意到方程的结构特点，设$\frac{x^2}{x-1}=y$，即得到一个关于y的一元二次方程，最后在已知y的值的情况下，用去分母的方法解方程$\frac{x^2}{x-1}=y$

解：设$\frac{x^2}{x-1}=y$，则原方程可化为$y^2-3y-4=0$　解得，$y=4$或$y=-1$

(1)当$y=4$时，由$\frac{x^2}{x-1}=4\Rightarrow x^2=4(x-1)\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$

(2)当$y=-1$时，由$\frac{x^2}{x-1}=-1\Rightarrow x^2=-x+1\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

检验：把各根分别代入原方程的分母，各分母都不为0

∴原方程的解为$x_1=2$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

说明：用换元法解分式方程常见的错误是只求出y的值，而没有求到原方程的解，即x的值。

例 3、解方程$\frac{8(x^2+2x)}{x^2-1}+\frac{3(x^2-1)}{x^2+2x}=11$

分析：注意观察方程特点，可以看到分式$\frac{x^2+2x}{x^2-1}$与$\frac{x^2-1}{x^2+2x}$互为倒数，因此，可以设$\frac{x^2+2x}{x^2-1}=y$，即可将原方程化为一个较为简单的分式方程。

解：设$\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=y$，则$\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}=\dfrac{1}{y}$

原方程可化为$8y+\dfrac{3}{y}=11$，即$8y^2-11y+3=0$ 解得，$y=1$或$y=\dfrac{3}{8}$

(1)当$y=1$时，由$\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1\Rightarrow x^2+2x=x^2-1\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

(2)当$y=\dfrac{3}{8}$时，由$\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow 5x^2+16x+3=0\Rightarrow x=-3$或$x=-\dfrac{1}{5}$

检验：把把各根分别代入原方程的分母，各分母都不为0

∴原方程的解为$x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=-3$，$x_3=-\dfrac{1}{5}$

说明：解决分式方程的方法就是采取去分母、换元等法，将分式方程转化为整式方程，体现了化归思想。

二、可化为一元二次方程的无理方程

根号下含有未知数的方程，叫做无理方程。

1．平方法解无理方程

例 4、解方程$\sqrt{x+7}-x=1$

分析：移项、平方，转化为有理方程求解。

解：移项得，$\sqrt{x+7}=x+1$

两边平方得，$x+7=x^2+2x+1$

移项，合并同类项得，$x^2+x-6=0$

解得，$x=-3$或$x=2$

检验：把$x=-3$代入原方程，左边$\neq$右边 ∴$x=-3$是增根

把$x=2$代入原方程，左边$=$右边 ∴$x=2$是原方程的根

∴原方程的解是$x=2$

说明：含未知数的二次根式恰有一个的无理方程的一般步骤：①移项，使方程的左边只保留含未知数的二次根式，其余各项均移到方程的右边；②两边同时平方，得到一个整式方程；③解整式方程；④验根。

例 5、解方程$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$

分析：直接平方将很困难，可以把一个根式移右边再平方，这样就可以转化为上例的模式，再用例 4 的方法解方程。

解：原方程可化为$\sqrt{3x-2}=3-\sqrt{x+3}$

两边平方得，$3x-2=9-6\sqrt{x+3}+x+3$

整理得，$6\sqrt{x+3}=14-2x \Rightarrow 3\sqrt{x+3}=7-x$

两边平方得，$9(x+3)=49-14x+x^2$

整理得，$x^2-23x+22=0$ 解得，$x=1$或$x=22$

检验：把$x=1$代入原方程，左边＝右边 $\therefore x=1$是原方程的根

把$x=22$代入原方程，左边≠右边 $\therefore x=22$是增根

$\therefore$原方程的解是$x=1$

说明：含未知数的二次根式恰有两个的无理方程的一般步骤：①移项，使方程的左边只保留一个含未知数的二次根式；②两边平方，得到含未知数的二次根式恰有一个的无理方程；③一下步骤同例 4 的说明。

2．换元法解无理方程

例 6、解方程$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

分析：本题若直接平方，会得到一个一元四次方程，难度较大，注意观察方程中含未知数的二次根式与其余有理式的关系可以发现，$3x^2+15x+3=3(x^2+5x+1)$，因此，可以设$\sqrt{x^2+5x+1}=y$，这样就可将原方程先转化为关于y的一元二次方程处理。

解：设$\sqrt{x^2+5x+1}=y$，则$x^2+5x+1=y^2 \Rightarrow 3x^2+15x=3(y^2-1)$

原方程可化为$3(y^2-1)+2y=2$，即$3y^2+2y-5=0$ 解得，$y=1$或$y=-\frac{5}{3}$

(1)当$y=1$时，由$\sqrt{x^2+5x+1}=1 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x=-1$或$x=0$

(2)当$y=-\frac{5}{3}$时，$\sqrt{x^2+5x+1}=-\frac{5}{3}$显然无解

检验：把$x=-1$，$x=0$分别代入原方程，都适合

$\therefore$原方程的解是$x_1=-1$，$x_2=0$

说明：解决根式方程的方法就是采取平方、换元等法，将根式方程转化为有理方程，体现了化归思想。

练习

A组

1．解下列方程：

(1) $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-5}{(x-2)(x-3)}$　　(2) $\frac{x}{2x^2-11x-21}=\frac{x+7}{x^2-12x+35}$

(3) $\frac{2}{y^2-4}=\frac{1}{y+2}-1$　　(4) $\frac{15}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1$

2．用换元法解方程： $x^2+\frac{4}{x^2}=4$

3．解下列方程：

(1) $\sqrt{x+2}=-x$　　(2) $\sqrt{x-5}+x=7$　　(3) $\sqrt{x+3}-2=x$

4．解下列方程：

(1) $\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+4}+1$　　(2) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

5．用换元法解下列方程：

(1) $x-12+\sqrt{x}=0$　　(2) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$

B组

1．解下列方程：

(1) $\frac{2x-5}{x^2-3x+2}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$　　(2) $\frac{x-4}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{x-6}{x^2-4}$

(3) $\frac{1}{x+7}=\frac{x+1}{(2x-1)(x+7)}+\frac{1}{2x^2-3x+1}$　　(4) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}=0$

2．用换元法解下列方程：

(1) $\frac{x^2-5x}{x+1}+\frac{24(x+1)}{x(x-5)}+14=0$　　(2) $\frac{2(x^2+1)}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x^2+1}=7$

(3) $\frac{x^4+2x^2+1}{x2}+\frac{x^2+1}{x}=2$

3．若 $x=1$ 是方程 $\frac{x}{x+a}+\frac{1}{x-a}=4$ 的解，试求 a 的值。

4．解下列方程：

(1) $\frac{3}{x^2-2x-3}=2x^2-4x-1$　　(2) $\frac{3x}{x-a}+\frac{6x^2}{a^2-x^2}=\frac{a-x}{x+a}$

5．解下列方程：

(1) $x^2+\sqrt{x^2-1}=3$　　(2) $\sqrt{x+10}-\frac{6}{\sqrt{x+10}}=5$

(3) $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$

第四讲 不等式

初中阶段已经学习了一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，高中阶段将进一步学习一元二次不等式和分式不等式等知识，本讲先介绍一些高中新课标中关于不等式的必备知识。

一、一元二次不等式及其解法

1．形如 $ax^2+bx+c>0$ (或 <0)(其中，$a\neq 0$)的不等式称为关于 x 的一元二次不等式。

例 1、解不等式 $x^2+x-6>0$

分析：不等式左边可以因式分解，根据“符号法则：正正(负负)得正、正负得负”的原则，将其转化为一元一次不等式组。

解：原不等式可以化为 $(x+3)(x-2)>0$ $\therefore \begin{cases}x+3>0\\x-2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3<0\\x-2<0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x>-3\\x>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-3\\x<2\end{cases}$ $\therefore x<-3$ 或 $x>2$ $\therefore$原不等式的解是 $x<-3$ 或 $x>2$

说明：当把一元二次不等式化为 $ax^2+bx+c>0$ (或 <0)的形式后，只要左边可以分解为两个一次因式，即可运用本题的解法。

例 2、解下列不等式：

(1) $(x+2)(x-3)<6$ (2) $(x-1)(x+2)\geq(x-2)(2x+1)$

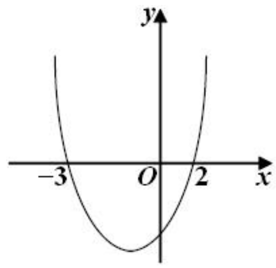
分析：要先将不等式化为 $ax^2+bx+c>0$ (或 <0)的形式，通常使二次项系数为正数。

解：(1)原不等式可化为 $x^2-x-12<0$，即 $(x+3)(x-4)<0$

$\therefore \begin{cases}x+3>0\\x-4<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3<0\\x-4>0\end{cases}$ $\therefore -3<x<4$ $\therefore$原不等式的解是 $-3<x<4$

(2)原不等式可化为$-x^2+4x\le 0$，即$x(x-4)\ge 0$

$\therefore \begin{cases} x\le 0 \\ x-4\le 0 \end{cases}$或$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-4\ge 0 \end{cases}$　$\therefore x\le 0$或$x\ge 4$　∴原不等式的解是$x\le 0$或$x\ge 4$



2．一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$(或<0)与二次函数$y=ax^2+bx+c$及一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的关系(其中，$a\ne 0$)(简称：三个二次)。

以二次函数$y=x^2+x-6$为例

(1)作出图象；(2)根据图象容易看到，图象与x轴的交点是$(-3,0)$、$(2,0)$，即当$x=-3$或2时，$y=0$，也就是说对应的一元二次方程$x^2+x-6=0$的两实根是$x_1=-3$，$x_2=2$；(3)当$x<-3$或$x>2$时，$y>0$，对应图象位于x轴的上方，也就是说不等式$x^2+x-6>0$的解是$x<-3$或$x>2$；当$-3<x<2$时，$y<0$，对应图象位于x轴的下方，也就是说不等式$x^2+x-6<0$的解是$-3<x<2$。

一般地，一元二次不等式可以结合相应的二次函数、一元二次方程求解，步骤如下：(1)将二次项系数先化为正数；(2)观测相应的二次函数图象。

①如果图象与x轴有两个交点$(x_1,0)$、$(x_2,0)$，此时对应的一元二次方程有两个不相等的实数根x_1、x_2(也可由根的判别式$\Delta>0$来判断)，那么(图 1)：

$$ax^2+bx+c>0\Leftrightarrow x<x_1\text{或}x>x_2；\quad ax^2+bx+c<0\Leftrightarrow x_1<x<x_2\ (a>0)$$

②如果图象与x轴只有一个交点$(-\frac{b}{2a},0)$，此时对应的一元二次方程有两个相等的实数根$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$(也可由根的判别式$\Delta=0$来判断)，那么(图 2)：

$$ax^2+bx+c>0\Leftrightarrow x\ne-\frac{b}{2a}；\quad ax^2+bx+c<0\text{无解}(a>0)$$

③如果图象与x轴没有交点，此时对应的一元二次方程没有实数根(也可由根的判别式$\Delta<0$来判断)，那么(图 3)：

$$ax^2+bx+c>0\Leftrightarrow x\in R；\quad ax^2+bx+c<0\text{无解}(a>0)$$

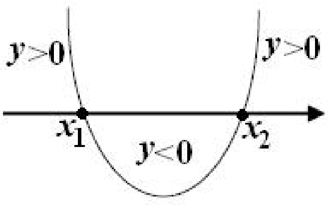


图1

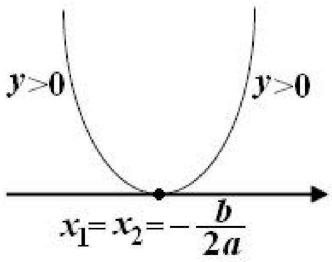


图2

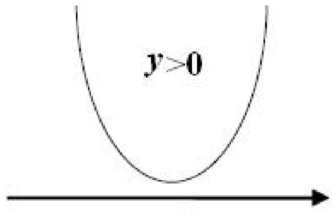


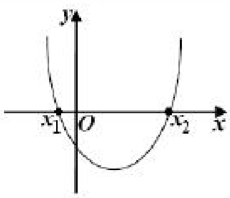
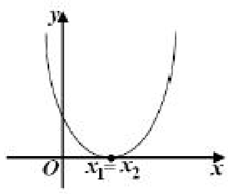
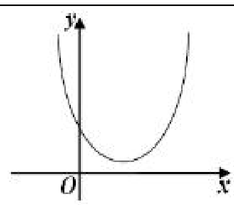
图3

如果单纯的解一个一元二次不等式的话，可以按照一下步骤处理：

(1)化二次项系数为正；

(2)若二次三项式能分解成两个一次因式的积，则求出两根x_1、x_2，那么“>0”型的解为$x<x_1$或$x>x_2$(俗称两根之外)；“<0”型的解为$x_1<x<x_2$(俗称两根之间)；

(3)否则，对二次三项式进行配方，变成$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，结合完全平方式为非负数的性质求解。

$a>0$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数的图象 $y=ax^2+bx+c$			
一元二次方程的根 $ax^2+bx+c=0$	有两个不等实根 x_1、$x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
一元二次不等式的解 $ax^2+bx+c>0$	$x<x_1$或$x>x_2$	$x\neq-\frac{b}{2a}$	R
一元二次不等式的解 $ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$	ϕ	ϕ

例 3、解下列不等式：

(1) $x^2-2x-8<0$　　　　(2) $x^2-4x+4\le 0$　　　　(3) $x^2-x+2<0$

解：(1)不等式可化为$(x+2)(x-4)<0$　∴不等式的解是$-2<x<4$

(2)不等式可化为$(x-2)^2\le 0$　∴不等式的解是$x=2$

(3)不等式可化为$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}<0$　$\therefore$原不等式无解

例 4、已知对于任意实数x，kx^2-2x+k恒为正数，求实数k的取值范围。

解：当$k=0$时，$kx^2-2x+k=-2x$，不合题意

当$k\neq 0$时，由题意得，$\begin{cases}k>0\\ \Delta=(-2)^2-4k^2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k>0\\ k<-1或k>1\end{cases}$　$\therefore k>1$

例 5、已知关于x的不等式$kx^2-(k^2+1)x-3<0$的解为$-1<x<3$，求k的值。

分析：对应的一元二次方程的根是-1和3，且对应的二次函数的图象开口向上，根据一元二次方程根与系数的关系可以求解。

解：由题意得，一元二次方程$kx^2-(k^2+1)x-3=0$的根是-1和3，且二次函数

$y=kx^2-(k^2+1)x-3$开口向上，由韦达定理得，

$-1+3=\frac{k^2+1}{k}$，$-1\times 3=-\frac{3}{k}$且$k>0$　$\therefore k=1$

说明：本例也可以根据方程有两根-1和3，直接代入对应的一元二次方程，且注意到$k>0$，从而得到$k=1$。

二、简单分式不等式的解法

例 6、解下列不等式：(1)$\frac{2x-3}{x+1}<0$　　　(2)$\frac{x+3}{x^2-x+1}\geq 0$

分析：(1)类似于一元二次不等式的解法，运用“符号法则”将之化为两个一元一次不等式组处理；或者因为两个数(式)相除异号，那么这两个数(式)相乘也异号，可将分式不等式直接转化为整式不等式求解；(2)注意到经过配方法，分母实际上是一个正数。

解：(1)方法一：原不等式可化为$\begin{cases}2x-3<0\\ x+1>0\end{cases}$或$\begin{cases}2x-3>0\\ x+1<0\end{cases}$

解得，$\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ x>-1\end{cases}$或$\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ x<-1\end{cases}$　$\therefore$原不等式的解为$-1<x<\frac{3}{2}$

方法二：原不等式可化为$(2x-3)(x+1)<0\Rightarrow -1<x<\frac{3}{2}$

(2)$\because x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$　$\therefore$原不等式可化为$x+3\ge 0\Rightarrow x\ge -3$

例 7、解不等式$\frac{1}{x+2}\le 3$

解：方法一：原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\3(x+2)\ge 1\end{cases}$或$\begin{cases}x+2<0\\3(x+2)\le 1\end{cases}$

解得$\begin{cases}x>-2\\x\ge -\frac{5}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x<-2\\x\le -\frac{5}{3}\end{cases}$　$\therefore$原不等式的解为$x<-2$或$x\ge -\frac{5}{3}$

方法二：

原不等式$\Leftrightarrow\frac{1}{x+2}-3\le 0\Rightarrow\frac{3x+5}{x+2}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}(3x+5)(x+2)\ge 0\\x+2\ne 0\end{cases}\Rightarrow x<-2$或$x\ge -\frac{5}{3}$

说明：(1)转化为整式不等式时，一定要先将右端变为0；(2)本例也可以直接去分母，但应注意讨论分母的符号。

三、含有字母系数的一元一次不等式

一元一次不等式最终可以化为$ax>b$($a\ne 0$)的形式

(1)当$a>0$时，不等式的解为$x>\frac{b}{a}$

(2)当$a<0$时，不等式的解为$x<\frac{b}{a}$

(3)当$a=0$时，不等式化为$0\cdot x>b$

① 若$b>0$，则不等式的解是R；②若$b\le 0$，则不等式无解

例 8、求关于x的不等式$m^2x+2>2mx+m$的解。

解：原不等式可化为$m(m-2)x>m-2$

(1)当$m(m-2)>0$即$m<0$或$m>2$时，不等式的解为$x>\frac{1}{m}$

(2)当$m(m-2)<0$即$0<m<2$时，不等式的解为$x<\frac{1}{m}$

(3)当$m=0$时，不等式化为$0>-2$，显然恒成立　$\therefore$原不等式的解为R

(4)当$m=2$时，不等式化为$0>0$，显然不成立　$\therefore$原不等式无解

综上，当$m<0$或$m>2$时，不等式的解为$x>\frac{1}{m}$；当$0<m<2$时，不等式的解为$x<\frac{1}{m}$；当$m=0$时，不等式的解为R；当$m=2$时，不等式无解。

例 9、已知关于 x 的不等式 $k^2 - kx > x + 2$ 的解为 $x > -\frac{1}{2}$，求实数 k 的值。

分析：将不等式整理成 $ax > b$ 的形式，可以考虑只有当 $a > 0$ 时，才有形如 $x > \frac{b}{a}$ $x > \frac{b}{a}$ 的解，从而令 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$

解：原不等式可化为 $(-k-1)x > -k^2 + 2$

由题意得，$\begin{cases} -k-1 > 0 \\ \frac{-k^2+2}{-k-1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < -1 \\ k = 1或k = -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\therefore k = -\frac{3}{2}$

练习

A 组

1．解下列不等式：

(1) $2x^2 + x < 0$　　(2) $x^2 - 3x - 18 \le 0$

(3) $-x^2 + x \ge 3x + 1$　　(4) $x(x+9) > 3(x-3)$

2．解下列不等式：

(1) $\frac{x+1}{x-1} \ge 0$　　(2) $\frac{3x+1}{2x-1} < 2$　　(3) $\frac{2}{x} > -1$　　(4) $\frac{2x^2 - x + 1}{2x+1} > 0$

3．解下列不等式：

(1) $x^2 - 2x > 2x^2 + 2$　　(2) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} \ge 0$

4．已知不等式 $x^2 - ax + b < 0$ 的解是 $2 < x < 3$，求 a、b 的值。

5．解关于 x 的不等式 $(m-2)x > 1 - m$。

6．已知关于 x 的不等式 $kx - 2k \le k + 2x$ 的解是 $x \ge 1$，求 k 的值。

7．已知不等式 $2x^2 + px + q < 0$ 的解是 $-2 < x < 1$，求不等式 $px^2 + qx + 2 > 0$ 的解。

B 组

1．已知关于 x 的不等式 $mx^2 - x + m < 0$ 的解是一切实数，求 m 的取值范围。

2．若不等式 $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$ 的解是 $x > 3$，求 k 的值。

3．解关于 x 的不等式 $56x^2 + ax < a^2$

4．a取何值时，代数式$(a+1)^2+2(a-2)-2$的值不小于0？

5．已知不等式$ax^2+bx+c>0$的解是$\alpha<x<\beta$，其中$\beta>\alpha>0$，求不等式$cx^2+bx+a<0$的解。

第五讲　　二次函数

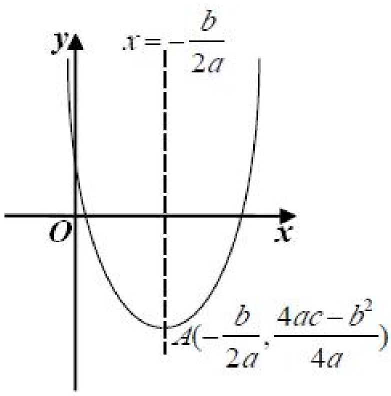
二次函数$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)是初中函数的主要内容，也是高中学习的重要基础。在初中，大家已经知道二次函数在自变量x取任意实数时的最值情况。本节我们将在这个基础上继续学习当自变量x在某个范围内取值时，函数的最值问题。

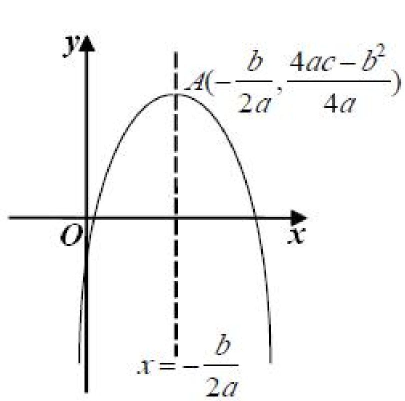
一、二次函数$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)的图象和性质

(1)当$a>0$时，函数$y=ax^2+bx+c$图象开口向上，顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}$。在对称轴的左侧，$y$随着$x$的增大而减小；在对称轴的右侧，$y$随着$x$的增大而增大；当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数取最小值$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

(2)当$a<0$时，函数$y=ax^2+bx+c$图象开口向下，顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}$。在对称轴的左侧，$y$随着$x$的增大而增大；在对称轴的右侧，$y$随着$x$的增大而减小；当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数取最大值$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

解决二次函数问题时，要善于借助函数图象，利用数形结合的思想方法解决问题。



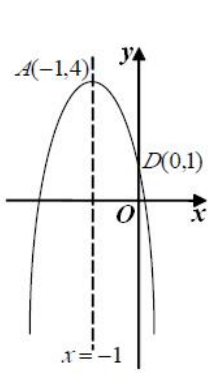


例 1、请求出二次函数 $y=-3x^2-6x+1$ 的图象的开口方向、对称轴方程、顶点坐标、最大值(或最小值)，并指出当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大(或减小)，并画出该函数的图象。

解：$y=-3x^2-6x+1=-3(x+1)^2+4$

函数图象的开口向下，对称轴方程 $x=-1$，顶点坐标为 $(-1,4)$，当 $x=-1$ 时，$y_{\max}=4$

当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小



二、二次函数的三种表示方式

1．一般式：$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)

2．顶点式：$y=a(x-h)^2+k$ ($a\neq0$)，顶点坐标为 (h,k)

3．交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a\neq0$)，其中 x_1、x_2 是二次函数图象与 x 轴交点的横坐标

例 2、已知二次函数图象过点 $(-1,-22)$、$(0,-8)$、$(2,8)$，求此二次函数的表达式。

解：设该二次函数为 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)

由题意得，$\begin{cases}a-b+c=-22\\c=-8\\4a+2b+c=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=12\\c=-8\end{cases}$ ∴所求二次函数为 $y=-2x^2+12x-8$

例 3、已知二次函数的最大值为 2，图象的顶点在直线 $y=x+1$ 上，并且图象经过点 $(3,-1)$，求此二次函数的解析式。

解：由题意得，二次函数图象的顶点坐标为 $(1,2)$

设二次函数的解析式为 $y=a(x-2)^2+1$ ($a<0$)

∵图象经过点 $(3,-1)$ ∴ $-1=a(3-2)^2+1$ ∴ $a=-2$

∴二次函数的解析式为 $y=-2(x-2)^2+1$，即 $y=-2x^2+8x-7$

例 4、已知二次函数的图象过点 $(-3,0)$、$(1,0)$，且顶点到 x 轴的距离等于 2，求此二次函数的表达式。

解：方法一：设二次函数的解析式为 $y=a(x+3)(x-1)$ ($a\neq0$)

即 $y=ax^2+2ax-3a=a(x+1)^2-4a$ ∴顶点坐标为 $(-1,-4a)$

由题意得，$|-4a|=2$ ∴ $a=\pm\dfrac{1}{2}$

∴二次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

方法二：∵二次函数的图象过点 $(-3,0)$、$(1,0)$ ∴对称轴为直线 $x=-1$

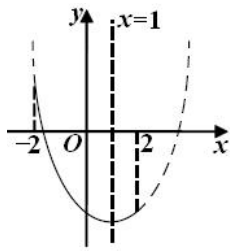
又∵顶点到 x 轴的距离为 2 ∴顶点坐标为 $(-1,\pm2)$

设二次函数的表达式为 $y=a(x+1)^2\pm2$，将点 $(1,0)$ 代入得，$a=\pm\frac{1}{2}$

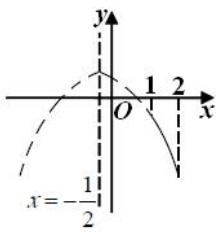
∴二次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

说明：在今后的解题过程中，要善于利用条件，选择恰当的方法来解决问题。通过上面的几道例题，同学们能否归纳出：在什么情况下，分别利用函数的一般式、顶点式、交点式来求二次函数的表达式？

三、二次函数的最值问题



二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）是初中函数的主要内容，也是高中学习的重要基础。在初中阶段大家已经知道：二次函数在自变量 x 取任意实数时的最值情况：当 $a>0$ 时，函数在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最大值；当 $a<0$ 时，函数在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最小值。



本节我们将在这个基础上继续学习当自变量 x 在某个范围内取值时，函数的最值问题，同时还将学习二次函数的最值问题在实际生活中的简单应用。

例 5、当 $-2\le x\le2$ 时，求函数 $y=x^2-2x-3$ 的最大值和最小值。

分析：作出函数在所给范围的及其对称轴的草图，观察图象的最高点和最低点，由此得到函数的最大值、最小值及函数取到最值时相应自变量 x 的值。

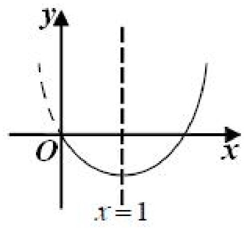
解：作出函数的图象可知，

当 $x=1$ 时，$y_{\min}=-4$；当 $x=-2$ 时，$y_{\max}=5$

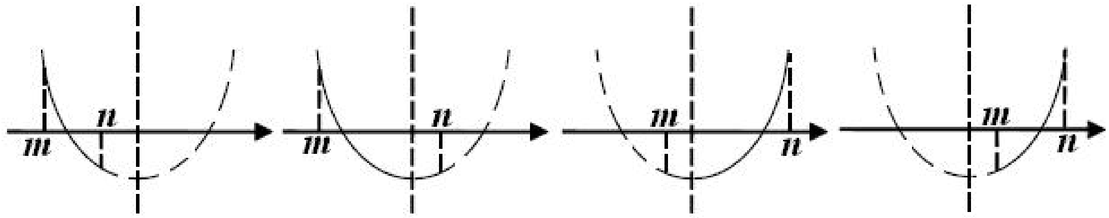
例 6、当 $1\le x\le2$ 时，求函数 $y=-x^2-x+1$ 的最大值和最小值。

解：作出函数的图象可知，

当$x=1$时，$y_{\max}=-1$；当$x=2$时，$y_{\min}=-5$



由上述两例可以看到，二次函数在自变量x的给定范围内，对应的图象是抛物线上的一段，那么最高点的纵坐标即为函数的最大值，最低点的纵坐标即为函数的最小值。根据二次函数对称轴的位置，函数在所给自变量x的范围的图象形状各异，下面给出一些常见情况：



例 7、当$x\ge 0$时，求函数$y=-x(2-x)$的取值范围。

解：作出函数$y=-x(2-x)=x^2-2x$在$x\ge 0$内的图象

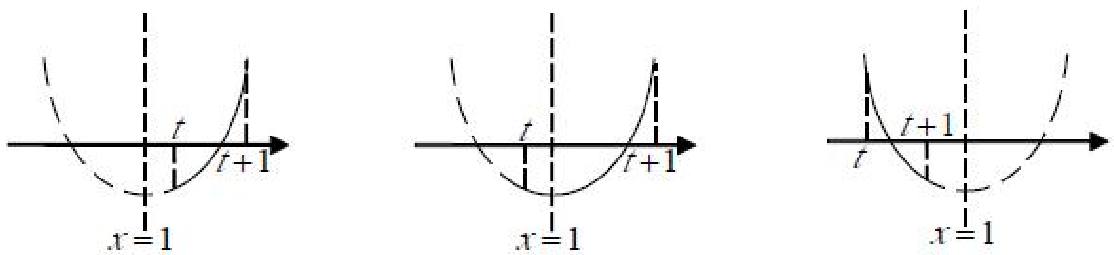
当$x=1$时，$y_{\min}=-1$，无最大值

∴当$x\ge 0$时，函数的取值范围是$y\ge -1$

例 8、当$t\le x\le t+1$时，求函数$y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{5}{2}$的最小值(其中$t$为常数)。

分析：由于x所给的范围随着t的变化而变化，所以需要比较对称轴与其范围的相对位置。

解：函数$y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-3$的对称轴为$x=1$，画出其草图



(1)当对称轴在所给范围左侧即$t>1$时，

函数在$x=t$处取得最小值$y_{\min}=\dfrac{1}{2}t^2-t-\dfrac{5}{2}$

(2)当对称轴在所给范围内即$t\le 1\le t+1\Rightarrow 0\le t\le 1$时，

函数在$x=1$处取得最小值$y_{\min}=-3$

(3)当对称轴在所给范围右侧即$t+1<1\Rightarrow t<0$时，

函数在$x=t+1$处取得最小值$y_{\min}=\frac{1}{2}t^2-3$

综上，$y_{\min}=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-3 & (t<0)\\ -3 & (0\le t\le 1)\\ \frac{1}{2}t^2-t-\frac{5}{2} & (t>1)\end{cases}$

在实际生活中，我们也会遇到一些与二次函数有关的问题：

例 9、某商场以每件30元的价格购进一种商品，试销中发现这种商品每天的销售量m(件)与每件的销售价x(元)满足一次函数$m=162-3x$，$30\le x\le 54$。

(1)写出商场卖这种商品每天的销售利润y与每件销售价x之间的函数关系式;(2)若商场要想每天获得最大销售利润,每件商品的售价定为多少最合适？最大销售利润为多少？

解：(1)由已知可得，每件商品的销售利润为$(x-30)$元，则m件的销售利润为

$y=m(x-30)=(162-3x)(x-30)=-3x^2+252x-4860\,(30\le x\le 54)$

(2)由(1)可得，$y=-3x^2+252x-4860=-3(x-42)^2+432$

∵对称轴$x=42$位于x的范围内，且抛物线开口向下

∴当$x=42$时，$y_{\max}=432$

即当每件商品的售价定为42元时每天有最大销售利润，最大销售利润为432元

练习

A 组

1．函数$y=2(x-1)^2+2$是将函数$y=2x^2$(　　)

A．向左平移1个单位、再向上平移2个单位得到的

B．向右平移2个单位、再向上平移1个单位得到的

C．向下平移2个单位、再向右平移1个单位得到的

D．向上平移2个单位、再向右平移1个单位得到的

2．函数$y=-x^2+x-1$图象与x轴的交点个数是(　　)

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．无法确定

3．函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ 的顶点坐标是(　　)

A．$(1,2)$　　B．$(1,-2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(-1,-2)$

4．抛物线 $y=x^2-(m-4)x+2m-3$，当 $m=$________时，图象的顶点在 y 轴上；当 $m=$________时，图象的顶点在 x 轴上；当 $m=$________时，图象过原点。

5．用一长度为 l 米的铁丝围成一个长方形或正方形，则其所围成的最大面积为 ________。

6．求下列二次函数的最值：

(1) $y=2x^2-4x+5$　　(2) $y=(1-x)(x+2)$

7．求二次函数 $y=2x^2-3x+5$ 在 $-2\le x\le 2$ 上的最大值和最小值，并求对应的 x 的值。

8．对于函数 $y=2x^2+4x-3$，当 $x\le 0$ 时，求 y 的取值范围。

9．求函数 $y=3-\sqrt{5x-3x^2-2}$ 的最大值和最小值。

10．已知关于 x 的函数 $y=x^2+(2t+1)x+t^2-1$，当 t 取何值时，y 的最小值为 0？

B 组

1．已知关于 x 的函数 $y=x^2+2ax+2$ 在 $-5\le x\le 5$ 上，

(1)当 $a=-1$ 时，求函数的最大值和最小值；(2)当 a 为实数时，求函数的最大值。

2．函数 $y=x^2+2x+3$ 在 $m\le x\le 0$ 上的最大值为 3，最小值为 2，求 m 的取值范围。

3．设 $a>0$，当 $-1\le x\le 1$ 时，函数 $y=-x^2-ax+b+1$ 的最小值是 -4，最大值是 0，求 a、b 的值。

4．已知函数 $y=x^2+2ax+1$ 在 $-1\le x\le 2$ 上的最大值为 4，求 a 的值。

5．求关于 x 的二次函数 $y=x^2-2tx+1$ 在 $-1\le x\le 1$ 上的最大值(t 为常数)。